

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ 22.02.2019

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

1. Determinați perechile  $(a, b)$  de numere întregi pentru care  $a^2 - 6a = b^2 + b - 10$ .

(Olimpiadă Marea Britanie, 2017)

Soluție:

- $(a-3)^2 = b^2 + b - 1$ ; pentru  $b > 1$  avem  $b^2 < b^2 + b - 1 < (b+1)^2 \Rightarrow b^2 + b - 1$  nu este pătrat perfect
- $b = 1 \Rightarrow (a-3)^2 = 1 \Rightarrow (a, b) \in \{(2, 1), (4, 1)\}$

2 a) Să se arate că pentru  $a$  număr natural nenul și  $x \geq a$  are loc inegalitatea

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} < 2\sqrt{x};$$

b) Demonstrați că  $\sqrt{2020} + \sqrt{2021} + \sqrt{2022} + \dots + \sqrt{2030} < 495$ .

Camelia Pîrvu, Oravița

Soluție:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| a) $\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - a^2} < 4x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} < x \Leftrightarrow 0 < a^2$<br>evident, relație adevărată;                                                                                                   | 2p |
| $\sqrt{2020} + \sqrt{2030} = \sqrt{2025-5} + \sqrt{2025+5} \stackrel{cf a)}{<} 2\sqrt{2025} \Rightarrow \sqrt{2020} + \sqrt{2030} < 90$<br>$\sqrt{2021} + \sqrt{2029} = \sqrt{2025-4} + \sqrt{2025+4} \stackrel{cf a)}{<} 2\sqrt{2025} \Rightarrow \sqrt{2021} + \sqrt{2029} < 90$ | 3p |
| $\Rightarrow \sqrt{2020} + \sqrt{2021} + \sqrt{2022} + \dots + \sqrt{2030} < 90 \cdot 5 + 45$                                                                                                                                                                                      | 2p |

3. Fie piramidele regulate  $VABCD$  și  $SABEF$  având bazele în același plan și vârfurile de aceeași parte față de bază. Lungimea laturii bazei este  $l$  iar înălțimea piramidei  $VABCD$  este  $h$ . Să se determine înălțimea piramidei  $SABEF$  astfel încât apotemele  $VM$  și  $SM$ ,  $M \in (AB)$  să fie perpendiculare.

(SGM 12/2018)

Soluție:

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fie $VO = h$ , $SQ = x$ înălțimile piramidelor regulate $VABCD$ , respectiv $SABEF$<br><br>Se obțin relațiile $VM^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$ ; $SM^2 = x^2 + \frac{l^2}{4}$ ; | 2p |
| Din $VOQS$ trapez dreptunghic $\Rightarrow VS^2 = h^2 + x^2 + l^2 - 2hx$                                                                                                    | 2p |
| Aplicând reciproca teoremei lui Pitagora în $\Delta VMS$ se obține:<br>$h^2 + x^2 + l^2 - 2hx = h^2 + x^2 + \frac{2l^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{l^2}{4h}$              | 3p |

4. Fie  $ABCD$  un tetraedru oarecare. Notăm cu  $I_D$  și  $I_A$  centrele cercurilor înscrise fețelor  $ABC$  și respectiv  $BCD$ . Dacă  $I_A \cap I_D \neq \emptyset$  și  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$  atunci  $[AB] \equiv [AC]$  și  $[DB] \equiv [DC]$

Soluție: Deoarece  $I_A \cap I_D \neq \emptyset$  rezultă  $AI_D \cap DI_A \neq \emptyset$ . Fie  $AI_D \cap DI_A = \{M\}$  unde  $M \in [BC]$ . (2p)

Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiurile  $DBC$  și  $ABC$  deducem:  $\frac{DB}{DC} = \frac{BM}{MC}$  și

respectiv  $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$ . (1p)

Deducem că  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$  și cu ipoteza  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$  concluzionăm că triunghiurile  $DBC$  și

$ABC$  sunt asemenea cu raport de asemănare 1. (2p)

În concluzie cele două triunghiuri sunt congruente și deci  $[AB] \equiv [AC]$  și  $[DB] \equiv [DC]$ . (2p)