

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a IX-a

Subiectul 1. Fie $ABCDE$ un pentagon convex, $P \in (DE)$, $Q \in (CD)$ astfel încât $\frac{PE}{PD} = \frac{QC}{QD} = 2$ și fie M, N centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv ABE . Demonstrați că $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Demonstrați că, pentru orice $x, y, z \in (0, \infty)$, avem:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} + \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \frac{z^2 + x^2}{z + x}\right) \geq 9.$$

Subiectul 3. Demonstrați că $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nu pot fi termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei aceleiași progresii aritmetice.

Subiectul 4. Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, avem:

$$\frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1.$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a X-a

Subiectul 1. Fie $u, v \in \mathbb{C}$ astfel încât $|u| = |v|$ și $2|u + v| \geq |u + 3v|$.
Demonstrați că $u = v$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $a, b \in (1, \infty)$. Rezolvați ecuația:

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}} b^x = 2ab.$$

Subiectul 3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

- a) Reprezentați grafic funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = f(x) + f(1 - x)$.
b) Calculați suma:

$$S = f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \cdots + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right).$$

Subiectul 4. Fie $K > 0$ și $A > B > a > 1$. Demonstrați că:

$$\text{a) } \frac{A}{B} > \frac{A + K}{B + K}; \quad \text{b) } 1 + \log_a \frac{A}{B} > \log_{B+K} (A + K).$$

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a XI-a

Subiectul 1. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1 - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4} - \dots - \sqrt[n]{n})$.

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dată prin $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
Determinați $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care următoarea limită:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x)$$

există și apoi indicați valoarea limitei în cazurile respective.

Subiectul 3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 = A + I_n$. Demonstrați că:
 $\det A > 0$.

Subiectul 4. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $a^2 + b^2 < 1$. Arătați că
există șiruri $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, să avem:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Mai mult, demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Faza Locală Dâmbovița, 16 februarie 2020
Clasa a XII-a

Subiectul 1. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \int_0^n \frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + x + 1} dx \right).$$

Gazeta Matematică

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

admite primitive.

Subiectul 3. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2x-2 & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup și $(G, \cdot) \sim (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Subiectul 4. Fie A inel cu proprietatea că $x^2 = x$, pentru orice $x \in A$.
Arătați că: a) $2x = 0$, oricare ar fi $x \in A$; b) $xy = yx$, oricare ar fi $x, y \in A$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.