



## Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

1. a. Demonstrarea proprietății – **2p**. b. Găsirea relației de recurență și a primilor trei termeni ai șirurilor – **1p**.

$$x_4 = \frac{2}{3}, y_4 = \frac{1}{3}, x_5 = \frac{8}{9}, y_5 = \frac{4}{9}, x_6 = \frac{23}{27}, y_6 = \frac{16}{27} - \mathbf{2p}$$

$$x_5, x_6, x_7 \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \text{ și } y_5, y_6, y_7 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] - \mathbf{1p}$$

Demonstrarea prin inducție – **1p**.

2. a)  $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$  și  $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$  **1p**

$$P(n): a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad \mathbf{1p}$$

Demonstrația prin inducție **2p**

$$\mathbf{b)} S = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1 \quad \mathbf{3p}$$

3. A, I, G coliniare dacă și numai dacă  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AI}$  **1p**

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC} \quad \mathbf{1p}$$

$$\overrightarrow{AL} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}, AI \cap BC = \{L\} \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Notăm } AQ = x, \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) \quad \mathbf{1p}$$

$$\overrightarrow{AG} = \alpha \overrightarrow{AI} \text{ devine } \frac{1}{2} \left( \frac{x}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\alpha b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha c}{a+b+c} \overrightarrow{AC} \quad \mathbf{1p}$$

$$\frac{x}{2c} = \frac{\alpha b}{a+b+c} \text{ și } \frac{1}{2} = \frac{\alpha c}{a+b+c} \quad \mathbf{1p}$$

Deci raportul lor va fi  $\frac{x}{c} = \frac{b}{c}$  adică  $x = b$ ,  $AQ = AC$ .

4. Fixarea reperului  $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$  – **1p**

$$\frac{CN}{ND} = k_1, \frac{AM}{MD} = k_2; \text{ punctele } G, M \text{ și } N \text{ sunt coliniare dacă și numai dacă}$$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AG} + (1-\alpha) \overrightarrow{AN} - \mathbf{1p};$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k_2}{1-k_2} - \mathbf{1p}; \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \vec{u} + \frac{2}{3} \vec{v} - \mathbf{1p}; \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_1 \overrightarrow{AD}}{1-k_1} = \vec{u} + \frac{1}{1-k_1} \vec{v} - \mathbf{1p};$$

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{2} - \mathbf{2p}.$$



## Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

**Clasa a X-a**

### Barem de corectare

**I. a. (3 puncte)**

Aplicăm inegalitatea  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \forall x, y > 0$ .

**b. (4 puncte)**

Folosim inegalitatea de la punctul **a.** pentru  $a = 3^x, b = 2^x, c = 1$ .

**II. a. (3 puncte)**

Luăm  $f(x_1) = f(x_2)$  rezultă  $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ , exploatând acest lucru rezultă  $x_1 = x_2$ .  
Deci  $f$  este injectivă.

**b. (4 puncte)**

Presupunem că există o astfel de funcție, apoi dând lui  $x$  valorile 2 și 4, obținem contradicția cu injectivitatea. Deci nu există funcții cu proprietatea cerută.

**III. a. (4 puncte)**

Notăm  $|a| = r$  și avem  $a \cdot \bar{a} = r^2$  și analoagele. Ținând seama de ipoteză și de acest lucru obținem  $(a+c)(a+b)(b+c) = 0$ , am folosit că  $d = -a - b - c$ ,  $a+b = -(c+d)$ ,  $a+c = -(b+d)$ ,  $b+c = -(a+d)$  și obține concluzia problemei.

**b. (3 puncte)**

Ecuția este echivalentă cu  $(z^2 + \alpha\beta)(z^2 + \gamma\delta) = 0$ . Presupunem că  $\alpha = a, \beta = b$ , deci  $a+b=0$ , din  $a+b+c+d=0$  rezultă  $c+d=0$ . Deci cele două ecuații vor avea soluțiile  $a$  și  $b$  respectiv  $c$  și  $d$ .

**IV. (4 puncte)**

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle ADC$  exprimând  $\cos B$  și  $\cos D$ , apoi însumându-le cu notațiile adecvate obținem  $\frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{d_1^2}$ . Am ținut cont că patrulaterul este inscriptibil și că  $\cos B = -\cos D$ .

**(3 puncte)**

Analog obținem  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geq \frac{4}{d_2^2}$ , apoi însumând inegalitățile se obține concluzia problemei.

Egalitate se obține atunci când patrulaterul este **pătrat**.



## Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

### Barem de corectare

- 1.) a.) se arată prin calcul direct că:  $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$  ..... 3 puncte  
b.) Din teorema Hamilton-Cayley rezultă  $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$ , de unde  $A^2 + 3I_2 = 2A$  (1).... 1 punct  
se arată că  $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \det A = 12$  (2)..... 1 punct  
din  $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ , se obține  $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \det(A - I_2) = 2^2 \cdot 2 = 8$  (3)..... 1 punct  
Din (2) și (3) obținem:  $2 \cdot \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 2 \cdot 8 - 12 = 4$ . ..... 1 punct
- 2.) a.) se folosesc relațiile:  
(1)  $\det(X+Y) + \det(X-Y) = 2 \cdot (\det X + \det Y)$   
(2)  $\det(X \cdot Y) = \det(Y \cdot X) = \det X \cdot \det Y$  pentru scrierea lor.... 2 puncte  
punând în relația (1)  $X = AB$  și  $Y = BA$  și folosind (2) se obține  
(3)  $\det(AB+BA) + \det(AB-BA) = 4 \det A \cdot \det B$ ..... 1 punct  
Din (3) și identitatea din enunț se obține cerința punctului a)..... 1 punct  
b.) se folosește relația  $X^2 - (\text{Tr}X) \cdot X + (\det X) \cdot I_2 = O_2$ , oricare ar fi  $X, Y \in M_2$ ..... 1 punct  
în care se pune  $X = AB - BA$  și avem  
 $(AB - BA)^2 - (\text{Tr}(AB - BA))(AB - BA) + \det(AB - BA)I_2 = O_2$  (3)  
dar  $\text{Tr}(AB - BA) = 0$  și ținând seama rezultatul de la a), din (3) rezulta b). .... 2 puncte
- 3.)  $a_{2k+1} = \frac{a_{2k}}{2k} + 2$  ..... 1 punct  
 $a_{2k+2} = a_{2k+1} + \frac{2}{2k+1} = \frac{a_{2k}}{2k} + 2 + \frac{2}{2k+1}$  ..... 1 punct  
 $a_2 = 3, a_3 = \frac{7}{2}, a_4 = \frac{25}{6}$  ..... 1 punct  
se arată prin inducție că  $a_{2k} \in (0, 5)$  ..... 2 puncte  
cum  $a_{2k+1} = \frac{a_{2k}}{2k} + 2$ , rezultă că  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = 2$ . ..... 1 punct  
de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  ..... 1 punct
- 4.) a.) se arată prin inducție că  $a_n = \frac{n+1}{n!}$  ..... 2 puncte  
demonstrarea că șirul este descrescător ..... 1 punct  
 $(a_n)_{n \geq 1}$  strict pozitiv, deci mărginit inferior,  
Prin urmare șirul este convergent ..... 1 punct  
b.) Înlocuim  $a_n$  cu  $\frac{n+1}{n!}$ . Limita devine:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln[(n-1)! a_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1 \quad \text{.....} \quad 3 \text{ puncte}$$



## Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

**Clasa a XII-a**

### Barem de corectare

- I. a) Demonstrează ca este monoid ..... 3 puncte
- b) ..... 3 puncte
- c) Exemplu ..... 1 punct
- II. a) Din  $x^2 = (xy)^2 \Rightarrow xx = xyxy \Rightarrow x = yxy$  (1)
- Din  $y^2 = (xy)^2 \Rightarrow yy = xyxy \Rightarrow y = xyx$  (2)
- Din (1) și (2)  $\Rightarrow xy = yxyxyx \Rightarrow xy = y(xy)^2x \Rightarrow xy = yy^2x \Rightarrow xy = y^3x$  și folosind (1)
- $\Rightarrow xy = y^3(yxy) \Rightarrow xy = y^4xy \Rightarrow x = y^4x \Rightarrow e = y^4$  (3) ..... 3 puncte
- $\Rightarrow y^{2013} = (y^4)^{503} \cdot y = e \cdot y = y$  ..... 1 punct
- Din (1) și (2)  $\Rightarrow yx = xyxyxy \Rightarrow yx = (xy)^2xy \Rightarrow yx = x^2xy \Rightarrow yx = x^3y$  și folosind (1)
- $\Rightarrow yx = x^3(xy) \Rightarrow yx = x^4yx \Rightarrow y = x^4y \Rightarrow e = x^4$  ..... 1 punct
- $\Rightarrow x^{2013} = (x^4)^{503} \cdot x = e \cdot x = x$  (4)
- b) Din (3) și (4)  $\Rightarrow x^{2013} \cdot y^{2013} = x \cdot y$  ..... 1 punct
- c) Folosind ipoteza avem:  $(xy)^{2012} = [(xy)^2]^{1006} = (x^2)^{1006} = (x^4)^{503} = e^{503} = e$  ..... 1 punct
- III. a) Verificare ..... 3 puncte
- b) Descompune integrala în  $I = \int \frac{(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})^2} e^x dx - \int \frac{\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} e^x dx$  ..... 1 punct
- Integrează prin parti ..... 1 punct
- Finalizare ..... 2 puncte
- V. a) Calculează integrand prin parti pentru  $k \in \{1, 2\}$  ..... 4 puncte
- b) Aplica inegalitatea Cauchy-Schwarz, forma integrala ..... 3 puncte