

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a XII-a

1. Fie $M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}$.

- Să se arate că $(M, \cdot)$ este grup abelian.
- Să se calculeze simetricul elementului $A(2016)$.
- Să se calculeze $A^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru.

Să se arate că dacă $x \in G$ și $x^2 = e$ atunci $x = e$.

b) Fie G și G' două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G' .

3. Fie $a > 1$ și $f: \left[\frac{1}{a}, a \right] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = k, \forall x \in \left[\frac{1}{a}, a \right]$. Calculați:

a) $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{(x+1) \cdot f(x)}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx;$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(x+1) \cdot \arctg x}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx;$

c) Fie $a \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a \sqrt[n]{\operatorname{tg} x} dx$.

4. Determinați primitivele funcției $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{1 + |\cos x|} \cdot e^x$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Timp de lucru: 3 ore.