

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a XII-a

Barem de corectare și notare

(1) (a) Pentru $y = z = \frac{1}{2} \xRightarrow{(a)} \left(x * \frac{1}{2}\right)^2 = x * 1 = x, \forall x \in M$ cu $p = 16 * \frac{1}{2}$ $x * \frac{1}{2} = \sqrt{x}, \forall x > 0 \Rightarrow p = 4$	(3p)
(b) $y = z = 1 \xRightarrow{(a),(b)} x^2 = x * 2, \forall x \in M; y = 2, z = 1 \Rightarrow x^3 = x * 3, \forall x \in M$ Inductiv se arată că $x^n = x * n, \forall x \in M, n \in \mathbb{N}^*$	(2p)
Pentru $x = \sqrt{2018}, n = 2018 \Rightarrow m = 1009$	(2p)
(2) (a) $A(t) \cdot A(u) = A(t+u) \in H, \forall A(t), A(u) \in H$	(2p)
Se verifică imediat axiomele grupului	(3p)
(b) De exemplu $f: H \rightarrow \mathbb{R}, f(A(t)) = t$ este un izomorfism între cele două grupuri (justificare).	(2p)
(3) (a) $\mathcal{A} = \int \frac{1}{x(2+x^6)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{2+x^6} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{6} \ln(2+x^6) \right) + C$	(4p)
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \Rightarrow F(x) = \arcsin(2x-1) + C$	(2p)
$F(1) = \pi \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(0) = 0 \in \mathbb{Z}$	(1p)
(4) $F_1(x) = -\ln(\cos x) + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_1(x) = 1 \in \mathbb{Z}$	(4p)
$F_3(x) = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln(\cos x) + k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow M = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F_3(x) = 0$	(3p)