

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024
CLASA a X - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Demonstrați că $\sqrt[3]{7-a\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+a\sqrt{2}} = 2$ dacă și numai dacă $a \in \{-5, 5\}$.

2. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\log_x \left(\frac{2xy}{x+y} \right) + \log_y \left(\frac{2xy}{x+y} \right) \geq 2, x, y \in (0, 1).$

b) $\frac{\log_x y}{x+y} + \frac{\log_y z}{y+z} + \frac{\log_z x}{z+x} \geq \frac{9}{2(x+y+z)},$ unde $x, y, z \in (0, 1)$ sau $x, y, z \in (1, \infty).$

3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$. Determinați valoarea maximă

a expresiei $E = \left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right|.$

4. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x + f((1+x)y)) = (1+y)f(x) + 1$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.