Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{a-\sqrt{bc}}{a+2(b+c)}+\frac{b-\sqrt{ca}}{b+2(c+a)}+\frac{c-\sqrt{ab}}{c+2(a+b)} \geq 0.$$

Soluţie. Din inegalitatea mediilor avem $\sqrt{bc} \leq \dfrac{b+c}{2}$, deci

$$\frac{a-\sqrt{bc}}{a+2(b+c)} \geq \frac{a-\frac{b+c}{2}}{a+2(b+c)} = \frac{2a-b-c}{2(a+2b+2c)}$$

Atunci membrul stâng al inegalităţii din enunţ este mai mare sau egal cu
$\dfrac{2a-b-c}{2(a+2b+2c)}+\dfrac{2b-c-a}{2(2a+b+2c)}+\dfrac{2c-a-b}{2(2a+2b+c)} \overset{not}{=} S$ **2p**
Notând $a+2b+2c=5x$, $2a+b+2c=5y$ şi $2a+2b+c=5z$, obţinem $a=-3x+2y+2z$, $b=2x-3y+2z$ şi $c=2x+2y-3z$. Atunci
$\dfrac{2a-b-c}{2(a+2b+2c)}=\dfrac{-10x+5y+5z}{10x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}-2\right)$ **3p**
Scriind relaţiile analoage şi sumând avem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-2\right)= \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-6\right] \geq 0, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei **2p**

Problema 2. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia $AB=a$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (BC)$ astfel încât $AE+CF=EF$.

a) Determinaţi măsura unghiului format de planele $(D'DE)$ şi $(D'DF)$.
b) Calculaţi distanţa de la D' la dreapta EF.

Soluţie. a) Segmentul $[BA]$ îl prelungim cu segmentul $[AH] \equiv [FC]$. Atunci $\Delta DAH \equiv \Delta DCF$ (C.C.), de unde $\widehat{H}DA \equiv \widehat{F}DC$, deci $m\left(\widehat{H}DF\right) = 90°$.

Apoi, $[DH] \equiv [DF]$, de unde $\Delta DHE \equiv \Delta DFE$ (L.L.L.) şi de aici $m(\widehat{F}DE) = m(\widehat{H}DE) = 45°$ **3p**

Deoarece $FD \perp DD'$ şi $ED \perp DD'$, rezultă $m(\widehat{(D'DE), (D'DF)}) = m(\widehat{FDE}) = 45°$ **1p**

b) Notăm cu P proiecţia punctului D pe dreapta EF. Conform teoremei celor trei perpendiculare obţinem $D'P \perp EF$, deci $d\left(D', EF\right) = D'P$ .. **1p**

Din congruenţa $\Delta DHE \equiv \Delta DFE$, obţinem $DP = AD = a$ **1p**

Teorema lui Pitagora ne conduce la $D'P = a\sqrt{2}$ **1p**

Problema 3. Se consideră mulţimea $A = \{n, n+1, n+2, ..., 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinaţi cea mai mică valoare a lui n pentru care A conţine cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Soluţie. Fie $p,\ q \in \mathbb{N}^*,\ (p,\ q) = 1$ astfel încât $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{p}{q}$. Evident $p < q$. Cum numerele a, b şi c se divid cu p, iar numerele c, d şi e se divid cu q, rezultă că există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c = mpq$ **1p**

Deoarece $e - a \leq 2n - n = n$, iar n trebuie să fie minim, trebuie ca numerele a, b şi c să fie multipli consecutivi ai lui p, iar c, d şi e să fie multipli consecutivi ai lui q. Prin urmare, $a = mpq - 2p$ şi $e = mpq + 2q$ **1p**

Deoarece $n \leq a < e \leq 2n \leq 2a$, rezultă $2a \geq e$, adică $2mpq - 4p \geq mpq + 2q$, sau $mpq \geq 4p + 2q$. $(*)$

Cum $\frac{c}{e} = \frac{mpq}{mpq + 2q} = \frac{p}{q}$, obţinem $m\left(q - p\right) = 2$, deci $m \in \{1, 2\}$ ... **1p**

Dacă $m = 1$, atunci $q - p = 2$, deci $q = p + 2$. Înlocuind în $(*)$ obţinem: $\left(p - 2\right)^2 \geq 8$, de unde $p \geq 5$. Pentru $p = 5$ şi $q = 7$, avem $a = 25$, $b = 30$, $c = 35$, $d = 42$, $e = 49$ şi, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n = 25$ **2p**

Dacă $m = 2$, atunci $q - p = 1$, deci $q = p + 1$. Înlocuind în $(*)$ obţinem: $\left(p - 1\right)^2 \geq 2$, de unde $p \geq 3$. Pentru $p = 3$ şi $q = 4$, avem $a = 18$, $b = 21$,

$c = 24$, $d = 28$, $e = 30$ şi, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n \in \{16, 17, 18\}$. Prin urmare, $n_{\min} = 16$ **2p**

Problema 4. a) Demonstraţi că suprafaţa unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstraţi că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafaţa unui pătrat de latură 2.

Soluţie. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2 şi S_1, S_2 şi S_3 trei discuri de rază 1.

a) Presupunem prin reducere la absurd că S_1, S_2 şi S_3 acoperă suprafaţa pătratului. Deoarece latura pătratului este egală cu diametrul unui disc, este necesar ca două vârfuri alăturate ale pătratului, fie acestea A şi B, să fie acoperite de un acelaşi disc S_1, adică $[AB]$ este diametrul lui S_1 .... **1p**

Fie $M \in (AD)$. Cum $MC > 2$, atunci M şi C sunt în discuri diferite. Putem presupune $C \in S_2$ şi $(AD) \subset C_3$. Analog $D \in S_3$ şi $(BC) \subset C_2$. Atunci $(BC] \subset S_2$ şi $(AD] \subset S_3$.

Fie acum $P \in (BC)$, $N \in (AD)$ astfel încât $CP = DN = 1{,}8$. Fie Q mijlocul lui $[CD]$. Atunci $PQ > 2$, deci $Q \notin S_2$. Analog $QN > 2$, deci $Q \notin S_3$. Cum, evident $Q \notin S_1$, obţinem o contradicţie **3p**

b) Fie $M \in (AC)$ astfel încât $AM = 2$. Notăm cu P şi R proiecţiile lui M pe AB şi AD. Fie $T \in BC$ astfel încât ca $PT = 2$ şi $U \in DC$ astfel ca $RU = 2$. Considerăm discurile de diametre AM, PT şi RU. Suprafaţa neacoperită de acestea este inclusă în interiorul pătratului format cu punctele C, U, X şi T unde $X \in (MC)$.

Este suficient să arătăm că $\mathcal{A}_{CUXT} < 0,25\% \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, ceea ce este echivalent cu $CT < \dfrac{1}{20}BC = 0,1$ sau $BT > 1,9$.

Avem $AP = \sqrt{2}$, $BP = 2 - \sqrt{2}$, $BT^2 = 4 - \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = 4\sqrt{2} - 2$.

Relaţia de demonstrat $BT > 1,9$ revine la $4\sqrt{2} - 2 > 1,9^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 5,61 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1,4025$, ceea ce este adevărat **3p**