

Clasa a X a (Barem de corectare și notare)

1.

Din $\lg(1+x^2) = \log_3 x = t$ ^{not.} se ajunge la $10^t = 1+x^2$ și $3^t = x$, de unde $10^t = 1+9^t$	(3p)
Putem scrie $1 = \left(\frac{1}{10}\right)^t + \left(\frac{9}{10}\right)^t$; cum funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(t) = \left(\frac{1}{10}\right)^t + \left(\frac{9}{10}\right)^t$ este strict descrescătoare, se ajunge imediat la unica soluție $t=1 \Rightarrow x=3$	(4p)

2.

Determinați valoarea minimă a lui $ z $, dacă $z \in \mathbb{C}$ și $ z-3 \cdot i + z-4 = 5$	(7p)
Fie $A(3i), B(4), M(z)$ $AB = 4-3i = \sqrt{25} = 5$ $AM = z-3i $; $BM = z-4 $;	(2p)
Deci, $AM + MB = AB \Rightarrow M \in [AB]$	(2p)
$ z = \min \Rightarrow d(O, AB) = OM = z $	(2p)
Finalizare $OM = \frac{12}{5}$	(1p)

3.

Facem $x=0$ și ajungem la $f(y) = y, \forall y \in \mathbb{R}$	(3p)
$x=0, x=1 \Rightarrow f(1) = f(3)$, deci f nu este injectivă	(4p)

4.

Soluție: Condiția din enunț conduce la: $\begin{cases} k \leq \log_4 x < k+1 \\ k+1 \leq \log_3(x+1) < k+2, \text{ unde } k \in \mathbb{N}. \\ k+2 \leq \log_2(x+1) < k+3 \end{cases}$ Deducem astfel: $\begin{cases} 4^k \leq x < 4^{k+1} \\ 3^{k+1} \leq x+1 < 3^{k+2} \\ 2^{k+2} \leq x+2 < 2^{k+3} \end{cases} \quad (1)$	(3p)
Se demonstrează imediat prin inducție matematică inegalitatea $4^n > 2^{n+3} - 2, \forall n \geq 3$. Se deduce astfel că pentru $k \geq 3$ avem $x \geq 4^k > 2^{k+3} - 2 > x$	(2p)
Se ajunge așadar la $k \in \{0, 1, 2\}$; notăm cu $M_k, k = \overline{0, 2}$, mulțimea soluțiilor sistemului (1) și se obțin $M_0 = [2, 4), M_1 = [8, 14), M_2 = [26, 30) \Rightarrow M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$.	(2p)