S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a XI-a

Problema1. Fie $A, B \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât: $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ şi $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$

Aflaţi x şi y .

Gazeta Matematică

Probleme2. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A + B = A \cdot B$ şi $\det(A + B) > 0$.

Să se arate că: a) $A^{-1} + B^{-1} = I_n$; b) $\det(A^2 + B^2) \geq 0$; c) $\det(A \cdot B - 2I_n) \geq 0$.

Probleme3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2}$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $x_1 = a \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita şirului.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\right)$.

Problema 4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0 > 0$, $x_n = x_{n-1} \cdot (2 - a x_{n-1})$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $a > 0$ un număr fixat. Dacă $x_1 > 0$, să se calculeze limita şirului.

Notă:

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Problemele propuse de: prof. Ilie Ştefan, prof. Matefi Istvan