

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze suma de matrice:

$$S = \sum_{k=1}^{3n+1} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ k & k \cdot (k+1) & k! \cdot k \end{pmatrix}.$$

Problema 2.

a) Fie matricea $X \in M_2(\mathbb{Z})$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze X^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze

că există o matrice $D \in M_2(\mathbb{Z})$, astfel încât $D^{2016} = B \cdot A$.

Problema 3.

Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x-1) = -4 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 1$ și $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$g_n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(\sin x)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze:

a) $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_n(x)}{x}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi}{a_n}$

Problema 4.

a) Fie $a > 0$, $b \neq 0$, numere date, iar $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir neconstant, definit prin $x_1 = b$,

$x_{n+1} \cdot x_n = x_n^2 - a \cdot x_n + a^2$, $(\forall) n \geq 1$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

b) Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir monoton, $x_1 > 0$, astfel încât

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n-1} - x_{2n} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \dots + x_{2n}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii

Timp efectiv de lucru 3 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7