

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Subiect clasa a X-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Fie $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ și $B = \{c + d\sqrt[3]{2} \mid c, d \in \mathbb{Q}\}$. Calculați $A \cap B$.

(3p) b) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x \in (0, \infty)$. Demonstrați că $\sum_{k=2}^n k \cdot \sqrt[k]{x} \leq \frac{n-1}{2}(2x+n)$.

PROBLEMA 2

(3p) a) Rezolvați inecuația $\log_4 x^2 + \log_{-x} 2 \leq 2$.

(4p) b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x + 3} - \sqrt[3]{2x^2 - 2x - 5} = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt[3]{4x^2 - 5x - 1}$$

PROBLEMA 3

Să se determine toate funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condițiile:

i) g este injectivă,

ii) $f(g(x) + y) = g(x + f(y))$ pentru $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 4

(4p) a) Să se determine valoarea minimă a modulului unui număr complex z pentru care are loc relația $|z - 3i| + |z - 4| = 5$.

(3p) b) Să se arate că dacă $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ este o rădăcină a ecuației $z^3 = 1$ atunci $(2 + 5a + 2a^2)^6 \in \mathbb{Z}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.