

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a IX-a

1. Arătați că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, cel puțin unul dintre numerele

$$n, n+1, n+2, \dots, 2n$$

este pătrat perfect.

2. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul în H . Notăm cu S și T punctele de intersecție dintre semidreptele $(BH$ și respectiv $(CH$ cu cercul circumscris triunghiului ABC . Dacă $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH}$, arătați că ABC este triunghi echilateral.

Gazeta Matematică

3. Determinați numerele reale x pentru care $[x] = \sqrt{|x| \cdot \{x\}}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Aurel Bârsan

4. (a) Demonstrați că $x^6 + 5 \geq 6x$, $\forall x \geq 0$.
(b) Determinați toate numerele reale $x, y, z \geq 1$ care au proprietatea că $x^7 + 5 \leq 6y$, $y^7 + 5 \leq 6z$ și $z^7 + 5 \leq 6x$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.