



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 17 februarie 2018

Barem

clasa a VIII-a

SUBIECTUL I.

Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$\sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2017 \cdot 2018}\right) + x^2} = \frac{4035}{2018}.$$

Soluție și barem:

din relația de mai sus obținem:

$$\sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right) + x^2} = \frac{4035}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^2 + 2x\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2018}\right) + x^2} = \frac{4035}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\left(\frac{2017}{2018}\right)^2 + 2x\left(\frac{2017}{2018}\right) + x^2} = \frac{4035}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{\left(\frac{2017}{2018} + x\right)^2} = \frac{4035}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$\left(\frac{2017}{2018} + x\right) = \frac{4035}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$x = \frac{4035}{2018} - \frac{2017}{2018} \dots\dots\dots 1p$$

$$x = 1. \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL II

a) Arătați că numărul $2018^4 - 6 \cdot 2017^2 - 12 \cdot 2016 - 9$ este pătrat perfect.

(G.M.11/2017)



b) Arătați că dacă $a^2+b^2-3a+5b+6,25=0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a+b \in [-4, 2]$.

Soluție și barem:

a) Dacă $2018=t$, atunci $t^4-6(t-1)^2-12(t-2)-9 \dots\dots\dots 1p$

și $t^4-6t^2+9=(t^2-3)^2=(2018^2-3)^2 \dots\dots\dots 2p$

$b) \Leftrightarrow 4a^2+4b^2-12a+20b+25=0$, $(2a-3)^2+(2b+5)^2=9 \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow (2a-3)^2 \leq 9 \Leftrightarrow |2a-3| \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 3 \dots\dots\dots 1p$

$(2b+5)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -4 \leq b \leq -1 \dots\dots\dots 1p$

Însumând, obținem $-4 \leq a+b \leq 2 \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL III

Se dă cubul ABCDA'B'C'D' de latură 10 cm, cu O este centrul feței BCC'B' și P mijlocul muchiei [AB].

a) Aflați unghiul dintre dreptele AO și A'C';

b) Demonstrați ca A'C' este paralelă cu planul (PCB').

c) Demonstrați ca D'O este perpendiculară pe planul (PCB').

Soluție și barem:

a) A'C' // AC deci $\sphericalangle (A'C', AO)$ este $\sphericalangle OAC \dots\dots\dots (1p)$

Triunghiul B'AC echilateral, AO mediana, $\sphericalangle OAC = 30^\circ \dots\dots\dots (1p)$

b) [OP] linie mijlocie în $\triangle ABC'$ deci $AC' // PO \dots\dots\dots (1p)$

$AC' // PO$, PO inclusă în (PCB'), deci $PO // (PCB') \dots\dots\dots (1p)$

c) $\triangle D'B'C$ echilateral $\Rightarrow D'O \perp B'C \dots\dots\dots (1p)$

$D'O \perp OP$ – reciproca teoremei lui Pitagora $\dots\dots\dots (1p)$

Concluzia $D'O \perp (B'PC) \dots\dots\dots (1p)$

SUBIECTUL IV

Pe planul dreptunghiului ABCD se ridică perpendiculara PD, $P \notin (ABC)$. Dacă $AM \perp PB$, $CN \perp PB$, ($M, N \in PB$), $MN = 3$ cm, $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, calculați:



- a) Lungimea segmentului PB;
b) Tangenta măsurii unghiului planelor (ABC) și (APC).

Soluție și barem:

$$a) PD \perp (ABCD), DC \perp BC \xRightarrow{T3 \perp} PC \perp BC, PD \perp (ABCD), PD \perp DA, DA \perp AB \xRightarrow{T3 \perp} PA \perp AB \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } \triangle PCB \text{ dreptunghic, aplic. T. catetei} \Rightarrow BC^2 = BN \cdot PB \Rightarrow 16 = BN \cdot PB \Rightarrow BN = \frac{16}{PB} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } \triangle PAB \text{ dreptunghic, aplic. T. catetei} \Rightarrow AB^2 = BM \cdot BP \Rightarrow 64 = BM \cdot BP \Rightarrow BM = \frac{64}{PB}.$$

$$\text{Obținem } BM - BN = \frac{64}{PB} - \frac{16}{PB} = 3 \Rightarrow \frac{48}{PB} = 3 \Rightarrow PB = 16 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) m(\angle (ABC), (PAC)) = m(\angle (DE, PE)) = m(\angle DEP)$$

$$\triangle ABC \text{ dreptunghic} \xRightarrow{T.P.} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$$

$$\triangle PDB \text{-dreptunghic} \xRightarrow{T.P.} PD^2 = PB^2 - BD^2 = 256 - 80 = 176 \Rightarrow PD = 4\sqrt{11}; DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{4 \cdot 8}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \dots\dots 2p$$

$$\text{tg}(\angle DEP) = \frac{PD}{DE} = \frac{4\sqrt{11}}{\frac{8\sqrt{5}}{5}} = 4\sqrt{11} \cdot \frac{5}{8\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{55}}{5} \dots\dots\dots 1p$$