



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ -11.02.2023

BAREM DE NOTARE

Clasa a X-a

Subiectul 1

Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, să se arate că

$$\log_a \frac{b+c}{2} \cdot \log_b \frac{a+c}{2} \cdot \log_c \frac{a+b}{2} \geq 1.$$

Soluție.

$$\log_a \frac{b+c}{2} \geq \log_a \sqrt{bc} = \frac{1}{2} \log_a bc = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln b + \ln c}{\ln a} \geq \frac{\sqrt{\ln b \cdot \ln c}}{\ln a} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Analog obținem } \log_b \frac{a+c}{2} \geq \frac{\sqrt{\ln a \cdot \ln c}}{\ln b} \dots\dots\dots 1p$$

$$\log_c \frac{a+b}{2} \geq \frac{\sqrt{\ln a \cdot \ln b}}{\ln c} \dots\dots\dots 1p$$

Prin înmulțirea relațiilor obținem inegalitatea cerută..... 2p

Subiectul 2

a) Se consideră în plan punctele A, B, C de afixe $z_A = 1$, $z_B = \varepsilon$, $z_C = \varepsilon^2$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

b) Fie în plan punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, unde z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe de același modul și $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție.

a) Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ o rădăcină a ecuației $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, cu $\varepsilon^3 = 1$.

$$AB = |z_B - z_A| = |\varepsilon - 1| = \sqrt{3}, AC = |\varepsilon^2 - 1| = \sqrt{3}, BC = |\varepsilon^2 - \varepsilon| = \sqrt{3}$$

Rezultă că $AB = AC = BC$, deci triunghiul este echilateral..... 3p

b) Fie O originea sistemului de coordonate.



Avem $OA = |z_1|$, $OB = |z_2|$, $OC = |z_3|$. Fie $R = |z_1| = |z_2| = |z_3|$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC **1p**

Centrul cercului circumscris este originea O de afix $z_O = 0$.

Centrul de greutate G al triunghiului ABC are afixul $z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{0}{3} = 0$ **1p**

Ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul $z_H = z_1 + z_2 + z_3 = 0$**1p**

Avem că: $z_O = z_G = z_H$, deci $O \equiv G \equiv H$.

Deci în triunghiul ABC centrul cercului circumscris, ortocentrul și centrul de greutate coincid, rezultă că triunghiul este echilateral.....**1p**

Subiectul 3

Se consideră funcțiile $f : (0,1) \rightarrow (2, \infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ și $g : (0,1) \rightarrow (4, \infty)$, $g(x) = x + \frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}}$. Admitem că funcția g este bijectivă.

a) Să se arate că funcția f este bijectivă.

b) Să se calculeze $g^{-1}(\frac{34}{3})$.

Soluție.

a) injectivitate: $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in (0,1)$ conduce la $(x_1 - x_2)(1 - \frac{1}{x_1 x_2}) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ **2p**

surjectivitate: ecuația $f(x) = y \in (2, \infty)$ conduce la $x = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \in (0,1)$**2p**

b) Avem $g(x) = \frac{34}{3}$, cu $x \in (0,1)$ și $g(\frac{1}{3}) = \frac{34}{3}$ **2p**

Atunci $g^{-1}(\frac{34}{3}) = \frac{1}{3}$ **1p**

Subiectul 4

Calculați suma $\sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1}$.

Soluție.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: secretariat@isjsalaj.ro



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE



$$\sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{2}} \frac{k^2 + 2k}{k^2 + 2k + 1} = \log_{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \dots\dots\dots 3p$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{2(n+1)} = \log_2 \frac{2(n+1)}{n+2} \dots\dots\dots 4p$$