

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a X-a

1. (a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x + 18^x = 6^x$.
(b) Studiați injectivitatea și surjectivitatea funcției $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{18} \right\rfloor$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .
2. Arătați că, dacă $m = \log_{27} 72$ și $p = \log_{18} 81$, atunci numărul $q = p(3m + 4)$ este rațional.
3. Pentru orice numere complexe x și y se notează $x * y = x + y + 1$, $x \circ y = x + y + i$ și $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ de } x}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, unde $i^2 = -1$.
(a) Determinați numărul natural a pentru care $i_{2018} = ai$;
(b) Determinați numărul complex b pentru care funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = bz$ este bijectivă și are proprietatea că $f(x * y) = (f(x)) \circ (f(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$.
4. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in [2, 3]$, arătați că:
$$S = \log_{a_1} (5a_2 - 6) + \log_{a_2} (5a_3 - 6) + \dots + \log_{a_{n-1}} (5a_n - 6) + \log_{a_n} (5a_1 - 6) \geq 2n$$

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte