



Str. Lacului Nr. 19, Slobozia Ialomița

Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825

E-mail: secretariat@isjialomita.ro

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a V-a

Problema 1. Fie numerele naturale x și y care satisfac relația: $5x + 3y = 2015$.

- a). Arătați că suma celor două numere nu poate fi 462.
b). Aflați cele două numere știind că suma lor este 463.

Soluție. a) Folosind metoda reducerii la absurd, se presupune că suma celor două numere naturale este 462. Deci $x + y = 462 \mid \cdot 3 \Leftrightarrow 3x + 3y = 1386 \dots \dots \dots$ **1 p**

Dar $5x + 3y = 2015 \Rightarrow 2x = 629 \dots \dots \dots$ **1 p**

Cum $2x$ este par și 629 impar obținem $x \notin \mathbb{N}$, contradicție $\dots \dots \dots$ **1 p**

b) $x + y = 463 \mid \cdot 3 \Leftrightarrow 3x + 3y = 1389 \dots \dots \dots$ **1 p**

$5x + 3y = 2015 \Rightarrow 2x = 626 \Leftrightarrow x = 313 \dots \dots \dots$ **2 p**

$313 + y = 463 \Leftrightarrow y = 150 \dots \dots \dots$ **1 p**

Problema 2. Arătați că dublul sumei numerelor naturale, care împărțite la 2015 dau câtul egal cu restul, nu este pătrat perfect.

Soluție. Conform teoremei împărțirii cu rest: $a = 2015 \cdot q + r, r < 2015, r \in \mathbb{N}$

Deoarece $q = r$ obținem $a = 2015 \cdot r + r = 2016 \cdot r \dots \dots \dots$ **1 p**

Pentru scrierea termenilor $a_0 = 2016 \cdot 0; a_1 = 2016 \cdot 1; a_2 = 2016 \cdot 2; \dots$;

$a_{2015} = 2016 \cdot 2014 \dots \dots \dots$ **1 p**

Calcularea $2s = 2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}) = 2 \cdot 2016 \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 2014) =$

$= 2 \cdot 2016 \cdot \frac{2014 \cdot 2015}{2} = 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \dots \dots \dots$ **2 p**

Deci dublul sumei este un produs de numere naturale consecutive care este divizibil cu 5 $\dots \dots \dots$ **1 p**

dar nu este divizibil cu $5^2 \dots \dots \dots$ **1 p**

deci dublul sumei nu este pătrat perfect $\dots \dots \dots$ **1 p**

Problema 3. Determinați elementele mulțimilor A și B dacă sunt satisfăcute simultan condițiile:

- a). A are trei elemente numere naturale pare consecutive;
 b). B are trei elemente numere naturale impare consecutive;
 c). Cel mai mic element al mulțimii B este succesorul celui mai mare element al mulțimii A;

d). Suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este egală cu 2033.

Soluție. Fie a un număr par. Atunci $A = \{a; a + 2; a + 4\}$ **1 p**

și $B = \{a + 5; a + 7; a + 9\}$ **1 p**

Deoarece A are elementele numere pare și B are elementele numere impare cele două mulțimi sunt disjuncte și $\text{Card}(A \cup B) = 6$ **1 p**

Din $A \cup B = \{a; a + 2; a + 4; a + 5; a + 7; a + 9\}$ obținem că

$$a + a + 2 + a + 4 + a + 5 + a + 7 + a + 9 = 2033 \Leftrightarrow 6a + 27 = 2033 \Leftrightarrow a = 336 \dots \dots \mathbf{2 p}$$

Atunci $A = \{336, 338, 340\}$ **1 p**

și $B = \{341, 343, 345\}$ **1 p**

Problema 4. Mulțimea numerelor naturale impare se împarte în submulțimi astfel:

$\{1\}, \{3,5\}, \{7,9,11\}, \{13,15,17,19\}, \dots$

a) Aflați care este primul număr din cea de a 2014-a submulțime.

b) Există o submulțime de acest tip care începe cu 2013? Justificați răspunsul.

Soluție. a) Pentru scrierea primelor $(k-1)$ submulțimi sunt folosite primele numere impare consecutive, deci ele conțin

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1) \cdot k}{2} \text{ numere} \dots \dots \dots \mathbf{1 p}$$

Cum numerele impare sunt de forma $(2n-1)$ obținem că primul element al celei de a k

$$\text{submulțime este: } 2 \cdot \left[\frac{(k-1) \cdot k}{2} + 1 \right] - 1 = (k-1) \cdot k + 2 - 1 = k^2 - k + 1 \dots \dots \dots \mathbf{2 p}$$

Deci primul element din a 2014-a submulțime este numărul $(2013 \cdot 2014 + 1)$.. **1 p**

b) Presupunem că există o submulțime care începe cu 2013. Atunci:

$$k^2 - k + 1 = 2013 \Leftrightarrow k(k-1) = 2012 \dots \dots \dots \mathbf{1 p}$$

cum $(k-1)$ și k sunt numere naturale consecutive și

$44 \cdot 45 = 1980 < 2012 < 45 \cdot 46 = 2070$ rezultă că 2012 nu poate fi scris ca un produs de două numere naturale consecutive **2 p**

● **Notă:** Baremele se vor afișa la orele 11,30.



SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
 OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
 SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VI-a

1 a) Scrie relația: $a,b=a \cdot b$ 1p

Din $a \cdot b = 18 \cdot 540, a = 18a_1, b = 18b_1; (a_1, b_1) = 1 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 30$ 1p

Din $a < b \Rightarrow a_1 < b_1$ Obținem: $(a_1, b_1) \in \{(1, 30); (2, 15); (3, 10); (5, 6)\}$ 1p

Finalizare $(a, b) \in \{(18, 540); (36, 270); (54, 180); (90, 108)\}$ 1p

b) Inegalitatea cerută este echivalentă cu: $\frac{12}{1 \cdot 13} + \frac{12}{13 \cdot 25} + \dots + \frac{12}{2005 \cdot 2017} < 1$ 1p

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2017} < 1$$

.....1p

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2017} < 1 \Leftrightarrow \frac{2016}{2017} < 1(A), \text{ ceea ce demonstrează inegalitatea inițială.} \dots\dots\dots 1p$$

2 Observa că $5^{2014} = 5^2 \cdot 5^{2012} = 3^2 \cdot 5^{2012} + 4^2 \cdot 5^{2012}$ 2p

Obține $3^{2012} < 5^{2012} \Leftrightarrow 3^{2014} < 3^2 \cdot 5^{2012}$ 2p

Analog $4^{2014} < 4^2 \cdot 5^{2012}$ 2p

Finalizare.....1p

3 Notează: $A_0 A_1 = x \Rightarrow A_0 A_2 = 2x, A_0 A_3 = 2^2 x, A_0 A_4 = 2^3 x, \dots, A_0 A_{2015} = 2^{2014} x$ 2p

Scrie ecuația $A_{2014} A_{2015} = A_0 A_{2015} : 2 \Leftrightarrow 2^{2013} x = 2^{2014} x \Leftrightarrow x = 2$ 1p

Obține: $A_0 A_1 = 2 \text{ cm}; A_{2005} A_{2015} = A_0 A_{2015} - A_0 A_{2005} = 2^{2015} - 2^{2005} = 1023 \cdot 2^{2005} (\text{cm})$ 2p

Din $A_0 A_k > 10^5 \Leftrightarrow 2^k > 10^5 \Leftrightarrow 2^{k-5} > 5^5$; și $2^{11} < 5^5 < 2^{12} \Rightarrow \min(k-5) = 12 \Leftrightarrow k = 17$ 2p

4 a) Din $\triangle AOD \equiv \triangle BOC (LUL) \Rightarrow \angle ADO = \angle BCO$ 1p $\triangle APC \equiv \triangle BPD (LUU) \Rightarrow [AP] = [PB]$
1p **b)**

$\triangle AOP \equiv \triangle BOP (LLL) \Rightarrow \angle AOP = \angle BOP$ 1p

Deoarece

$P \in \text{Int} \angle (AOB)$ și $\angle XOP = \angle YOP \Rightarrow [OP \rightarrow \text{bis} \angle XOY$ 1p

c) Demonstrează că dacă $OP \cap AB = \{M\}$, atunci - M, mijlocul lui [AB]

$\triangle AOM \equiv \triangle BOM (LUL) \Rightarrow [AM] = [MB] \Leftrightarrow M - \text{mijlocul lui } [AB]$ 1p

Analog se arată că N este mijlocul lui [CD], unde $\{N\} = OP \cap CD$ 1p

Din M și

N mijloacele [AB] respectiv [CD] și $M, N \in OP \Rightarrow O, M, P, N$ - coliniare.....1p

● **Notă:** Baremele se vor afișa la orele 11,30.

- **Notă: Baremele se vor afișa la orele 11,30.**

Str. Lacului Nr. 19, Slobozia Ialomița

Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825

E-mail: secretariat@isjialomita.ro

SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VII-a

Problema 1. a). Să se calculeze:

$$A = \frac{4-2}{3 \cdot 1} + \frac{6-4}{5 \cdot 3} + \frac{8-6}{7 \cdot 5} + \dots + \frac{2016-2014}{2015 \cdot 2013}.$$

b). Determinați cel mai mic număr întreg care este mai mare decât x , unde

$$x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{12} + \sqrt{16} + \sqrt{20}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

Soluție. a) $A = \frac{2}{3 \cdot 1} + \frac{2}{5 \cdot 3} + \frac{2}{7 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2015 \cdot 2013}$ 1 p

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2015}$$
 2 p

$$A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$$
 1 p

b). $x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{12} + \sqrt{16} + \sqrt{20}}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}) + 2 \cdot (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} =$

$$= \frac{(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})(\sqrt{2} + 2)}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \sqrt{2} + 2$$
 1 p

Scrierea relației $1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{2} + 2 < 4$ 1 pConcluzia: cel mai mic număr natural mai mare decât x este 4 1 p**Problema 2.** Fie numerele $a_1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{3+5}$, $a_3 = \sqrt{7+9+11}$,

$$a_4 = \sqrt{13+15+17+19}, \dots$$

a). Calculați a_9 .b). Câte numere $a_k, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 2015$, sunt numere iraționale.**Soluție. a)** se observă că: $a_1 = \sqrt{1} = \sqrt{1^3} = 1 \cdot \sqrt{1}$

$$a_2 = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2 \cdot \sqrt{2}; \quad a_3 = \sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3 \cdot \sqrt{3}; \quad a_4 = \sqrt{64} = \sqrt{4^3} = 4 \cdot \sqrt{4}; \dots$$

În general numerele au forma $a_k = \sqrt{k^3} = k \cdot \sqrt{k}$ 2 p

deci $a_9 = 9 \cdot \sqrt{9} = 27$ 1 p

b). Pentru a afla numărul numerelor iraționale scădem din 2015 numărul de numere raționale. Pentru ca $a_k \in \mathbb{Q}$ trebuie să avem k pătrat perfect 1 p

Cel mai mare pătrat perfect mai mic decât 2015 este $1936 = 44^2$, deci $1^2 \cdot \sqrt{1^2}$, $2^2 \cdot \sqrt{2^2}$, $3^2 \cdot \sqrt{3^2}$, ..., $44^2 \cdot \sqrt{44^2}$ sunt numere raționale, deci avem 44 numere raționale 2 p

Dacă sunt 44 numere raționale, atunci $2015 - 44 = 1971$ sunt numere iraționale .. 1 p

Problema 3. În paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 2 \cdot BC$, se construiește $[AM]$ bisectoarea $\angle DAB$, $M \in [DC]$. Perpendiculara în A pe AM intersectează BC în N . Dacă $MN \cap AB = \{P\}$, aflați valoarea raportului $\frac{AP}{PB}$.

Soluție. $[AM]$ bisectoarea $\angle DAB \Rightarrow \angle DAM \equiv \angle MAB$; dar $\angle MAB \equiv \angle AMD$ (alterne interne) $\Rightarrow \triangle ADM$ isoscel de bază $[AM] \Rightarrow AD = DM$; dar $AD = BC = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow M$ este mijlocul laturii $[DC]$ 1 p

deoarece $[AM]$ bisectoarea $\angle DAB$ și $AN \perp AM \Rightarrow [AN]$ bisectoarea $\angle EAB$, unde $A \in (DE) \Rightarrow \angle EAN \equiv \angle NAB$ 1 p

din $\angle EAN \equiv \angle ANB$ (corespondente) $\Rightarrow \angle NAB \equiv \angle ANB \Rightarrow AB = BN$.. 1 p

În $\triangle NMC$ avem $PB \parallel MC \Rightarrow$ (cf. T.F.A.) $\triangle NPB \sim \triangle NMC \Rightarrow \frac{PB}{MC} = \frac{NB}{NC}$.. 1 p

Cum $MC = \frac{AB}{2} = BC$ și $NB = AB = 2 \cdot BC$ găsim

$NC = NB + BC = 2 \cdot BC + BC = 3 \cdot BC \Rightarrow \frac{PB}{BC} = \frac{2 \cdot BC}{3 \cdot BC} \Rightarrow PB = \frac{2 \cdot BC}{3}$.. 1 p

Deci $AP = AB - PB = 2 \cdot BC - \frac{2 \cdot BC}{3} = \frac{4 \cdot BC}{3}$ 1 p

Adică $\frac{AP}{PB} = \frac{4 \cdot BC}{3} \cdot \frac{3}{2 \cdot BC} = 2$ 1 p

Problema 4. În triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle C) = 30^\circ$ considerăm bisectoarea $[BE, E \in [AC]]$ și un punct D pe $[BC]$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ și F este mijlocul lui $[AB]$, arătați că F, O și C sunt coliniare.

Soluție. Deoarece $\{O\} = BE \cap AD$ vom arăta că $O \in CF$ arătând că dreptele AD, BE și CF sunt concurente folosind reciproca teoremei lui Ceva.

Arătăm că $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$.

Deoarece F este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow BF = FA \Rightarrow \frac{BF}{FA} = 1$ **1 p**

Cum $[BE]$ este bisectoare $\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ **2 p**

Din $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle C) = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$,

deci $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ **1 p**

Din ipoteză $BC = 3 \cdot BD \Rightarrow DC = BC - BD = 2 \cdot BD$ deci $\frac{CD}{DB} = 2$ **1 p**

Așadar, $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, deci dreptele AD , BE , CF sunt concurente, și
deci punctele C , O , F coliniare **2 p**

● **Notă: Baremele se vor afișa la orele 11,30.**



SUBIECTE PROPUSE PENTRU ETAPA LOCALĂ
 OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2015
 SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – clasa a VIII-a

Subiectul 1 a) Amplifica în membrul stâng cu $(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$, simplifică prin k și obține

$$\frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+k}} \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare1p

b) Se aplică rezultatul precedent, având $K=13$ și se obține:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{27}} + \dots\dots\dots \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+13}} = \frac{39}{40} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{n+13}} = \frac{39}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+13}} = \frac{1}{40} \dots\dots\dots 1p$$

Finalizare $n=1587$ 1p

Subiectul II a) Rationalizează numitorul, obține în paranteză pătrată:

$$2 \cdot (5 - 2\sqrt{6})^{2015} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Scoate factor comun și obține: } (10 + 4\sqrt{6})^{2015} = 2^{2015} (5 + 2\sqrt{6})^{2015} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizează } \frac{2^{2016} \cdot 1^{2015}}{2^{2016}} = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) Obține forma: } (2a-b-3) + (a-2b+1)\sqrt{3} = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } (2a-b-3) \in \mathbb{Q} \text{ și } 0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a-2b+1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Din } (a-2b+1) \in \mathbb{Q} \text{ și } (a-2b+1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a-2b+1=0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Înlocuind în prima relație } \Rightarrow 2a-b-3=0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Finalizare: } a = \frac{7}{3} \text{ și } b = \frac{5}{3} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul III a) Justificare: $d(M, AC) = ME$, unde $BE \perp AC$ 1p

$$A[ABC] = 6\sqrt{2}(\text{cm}^2) \Rightarrow BE = 2\sqrt{3}\text{cm}, ME = 4\text{cm} \dots\dots\dots 1p$$

b) Justificare; $d[B, (MAC)] = BQ$, unde $BQ \perp ME$ 1p

$$BQ = \sqrt{3}\text{cm} \dots\dots\dots 1p$$

c) Justifica: $pr_{(MAB)} \Delta MAC = \Delta MAF, CF \perp AB$ 1p

Calculeaza: $\cos u = \frac{A_{[MAF]}}{A_{[MAC]}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $u = m\angle[(MAC), (MAF)]$ 2p

Subiectul IV Aplica t.Ceva in $\triangle ACV$ si obtine: $\frac{VF}{FA} = \frac{VE}{EC}$ 2p

Aplica R.T.THALES in $\triangle ACV$ si obtine $EF \parallel AC$ 1p

Analog demonstreaza ca $ST \parallel BD$ 3p

Finalizare $m\angle(EF, ST) = m\angle(AC, BD) = 90^\circ$ 1p

- Notă: Baremele se vor afișa la orele 11,30.