

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} |z - 1 - i| \leq \sqrt{2} \\ |z - 3 + i| = |z - 1 - i|, \text{ unde } z \in \mathbb{C}. \\ |z - 3 + i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

PROBLEMA 2. Considerăm mulțimea $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}^*$ ($n \geq 2$) cu proprietatea că $a_i \cdot a_j \in M$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Să se arate că $M = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;
- b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$, unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, este funcția definită prin $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i^{[n \cdot x]}$.

PROBLEMA 3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

- a) Să se arate că funcția f este bijectivă și să se determine inversa ei f^{-1} ;
- b) Să se determine soluțiile întregi ale ecuației $2^x - 2^{-x} = \log_2 \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$.

PROBLEMA 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \frac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, unde $a, b > 1$.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.