

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a X-a

Barem de evaluare și notare

(1) (a) Prin împărțire cu $6^x > 0$ se obține $\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3^x = 1$; funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 3^x$ este strict crescătoare, deci injectivă. Din $f(x) = 1 = f(-1)$ se obține unica soluție: $x = -1$.	(4p)
(b) De exemplu $f(0) = f(1) \Rightarrow f$ nu este injectivă	(1p)
Funcția este crescătoare și $f(17) = 1, f(18) = 3 \Rightarrow 2 \notin \text{Im } f \Rightarrow f$ nu este surjectivă	(2p)
(2) $m = \log_{27} 72 = \frac{1}{3} \log_3 (9 \cdot 8) = \frac{1}{3} (2 + 3 \log_3 2) \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3m - 2}{3}$	(3p)
$p = \log_{18} 81 = 4 \log_{18} 3 = \frac{4}{2 + \log_3 2} = \frac{12}{3m + 4} \Rightarrow$	(3p)
$p(3m + 4) = 12 \in \mathbb{Q}$	(1p)
(3) (a) Pentru $i_2 = i \circ i = 3i, i_3 = i_2 \circ i = 5i, i_4 = i_3 \circ i = 7i$ și se demonstrează prin inducție că	(3p)
$i_n = (2n - 1)i, \forall n \geq 1 \Rightarrow a = 4035$	
(b) $f(x * y) = b(x + y + 1), (f(x)) \circ (f(y)) = bx + by + i, \forall x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow b = i$	(2p)
Se demonstrează că funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = iz$ este bijectivă.	(2p)
(4) $2 \leq a_k \leq 3 \Rightarrow 2 - a_k \leq 0$ și $3 - a_k \geq 0$, deci $5a_k - 6 \geq a_k^2$.	(2p)
Scrie: $\log_{a_k} (5a_{k+1} - 6) \geq \log_{a_k} a_{k+1}^2, k = \overline{1..n}, a_{n+1} = a_1$	(1p)
Deduce: $S \geq 2 \log_{a_1} a_2 + 2 \log_{a_2} a_3 + \dots + 2 \log_{a_n} a_1$	(1p)
Aplică inegalitatea mediilor și finalizare	(3p)