

Soluție

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] - \{x\} = [2x + 2] \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2} \right] - \{x\} = [2x] + 2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Avem } \{x\} = \left[x + \frac{1}{2} \right] - [2x] - 2 \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Deoarece } \{x\} \in [0, 1) \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Ecuația devine } \left[x + \frac{1}{2} \right] = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 \leq x + \frac{1}{2} < 2x + 3 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\text{Obținem } x \in \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x = -2 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

PROBLEMA 3

Să se determine șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ care verifică următoarea condiție:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \geq 1.$$

(Selectată de prof. Lucaciu Simona, Colegiul Național „Silvania” Zalău)

Soluție

$$\text{Pentru } n=1 \Rightarrow a_1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Rightarrow a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Pentru } n=2 \Rightarrow 1 + a_2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \Rightarrow a_2^2 = 4 \Rightarrow a_2 = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Demonstrăm prin inducție matematică: $a_n = n, \quad \forall n \geq 1$

Etapa I. Verificare: $n=1 \Rightarrow a_1 = 1$ (A)..... 1 punct

Etapa II. Demonstrație: Presupunem $a_k = k, \quad \forall k = \overline{1, n}$ și demonstrăm $a_{n+1} = n+1$

$$\text{Atunci } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + a_{n+1}^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \Rightarrow$$

$$a_{n+1}^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow a_{n+1}^2 = (n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1} = n+1 \dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Conform principiului inducției matematice rezultă $a_n = n, \quad \forall n \geq 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

PROBLEMA 4

Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O . Fie P și Q simetricele ortocentrului și a vârfului A față de mijlocul laturii BC . Să se arate că $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$.

(Gazeta Matematică Nr.3/2014)

Soluție

Cum P este simetricul ortocentrului $\triangle ABC$ față de mijlocul laturii BC , rezultă că AP este diametru în cercul circumscris triunghiului, deci $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OP}$ 1 punct

Q simetricul vârfului A față de mijlocul laturii BC , $\Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 1 punct

Atunci $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 2 puncte

Dar $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$, de unde rezultă

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$ 3 puncte