

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 22.02.2019
Clasa a VII-a
Barem de corectare și notare

1. Se dau mulțimile $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{10}\}$, $B = \{\sqrt{11}, \sqrt{12}, \dots, \sqrt{20}\}$ și $C = \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$.
Determinați numărul de elemente raționale ale mulțimii C

(***)

Soluție:

Distingem cazurile:

- a) $x \in A \cap \mathbb{Q}, y \in B \cap \mathbb{Q}$ de unde rezultă: $\{4, 8, 12\} \subset C$ 2p
- b) $x \in \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ și identificăm perechile: $(x, y) = (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $(x, y) = (2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$,
 $(x, y) = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $(x, y) = (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ 3p
- Deducem că $\{6, 10\} \subset C$ 1p
- Concluzia: $|C \cap \mathbb{Q}| = 5$ 1p

2. Determinați perechile (x,y) de nr. întregi pentru care $2x^2 - 2y \leq 15$ și $2x^2 + x(1-4y) - 2y = 15$
(Lucian Dragomir R.M.C.S.)

Soluție:

- Ecuția poate fi scrisă $(2x+1)(x-2y)=15$ 3p
- Cum $x, y \in \mathbb{Z}$, avem de analizat 8 cazuri2p
- Ținând cont de prima relație și de cazurile studiate obținem soluțiile (1,-2) și (-1,7)..2p

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, E mijlocul lui [BC] și M un punct pe (BC). Paralele prin M la AE intersectează dreptele AB și AC în S respectiv T. Arătați că suma MS+MT este constantă.

(xxx)

Soluție:

În cazul în care $M \in (BE)$ din t.f.a $\Rightarrow \frac{AE}{TM} = \frac{CE}{CM}$ și $\frac{SM}{AE} = \frac{BM}{BE} \Rightarrow \frac{TM+SM}{AE} = \frac{BM+CM}{\frac{BC}{2}} = 2$,3p adică

$TM+MS=2AE$ 2p

Cum (AE) este mediană în $\triangle ABC$, atunci suma cerută este constantă2p

4. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$ și E mijlocul segmentului (BC). Perpendiculara în E pe BC intersectează pe AC în F. Arătați că $BF \perp AE$.

(Lavinia Moatăr)

Soluție :

Cum AE mediană în $\triangle ABC$ și $m(\angle B) = 60^\circ$ rezultă $\triangle ABE$ echilateral.2p

-
- Construim $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, atunci AD mediana rezultă $[BD] \equiv [DE]$1p
- Fie $BF \cap AD = \{M\}$, arată că MD este linie mijlocie în $\triangle AEF \Rightarrow [BM] \equiv [MF]$ 1p
- Arată că ME este linie mijlocie în $\triangle BFC \Rightarrow ME \parallel AC$, dar $AD \parallel EF \Rightarrow AMEF$ paralelogram1p
- Arată că $AMEF$ este romb rezultă $AE \perp BF$2p