

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a XI-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

Se consideră matricele $A, B \in M_n(R)$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiție trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in N^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + \dots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A ?$$

Subiectul 2.(7p)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{pmatrix}, x \in R$

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos^n 2x}{2} & \frac{1 - \cos^n 2x}{2} \\ \frac{1 - \cos^n 2x}{2} & \frac{1 + \cos^n 2x}{2} \end{pmatrix}$, pentru n natural nenul. (3p)

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \det A^k}{\det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right)}$. (4p)

Subiectul 3.(7p)

Fie $(a_n)_{n \in N}$ un șir astfel încât $a_0 > 0$ și $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2 + a_n + 1}, \forall n \in N$.

a) Să se arate că $(a_n)_{n \in N}$ este strict crescător și nemărginit. (3p)

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$. (4p)

Subiectul 4.(7p)

Se consideră funcția $f : R \rightarrow R$ cu proprietatea că $|f(x) - x \sin x| \leq |x^3|$, oricare ar fi

$x \in R$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.