



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

Clasa a XI – a

**PROBLEMA 1.** Fie  $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$  astfel încât  $\det(\sqrt{2}A + B) = \det(A + B\sqrt{3}) = 0$ .

Demonstrați că:

- a)  $\det A = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)]$ ;
- b)  $\det A = \det B$ ;
- c)  $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$ .

**PROBLEMA 2.** Fie  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  astfel încât  $A^2 + A + I_n = O_n$ . Aflați  $n$ , știind că  $\det(A^n + I_n) = 2^{2016}$ .

**PROBLEMA 3.** Fie  $a \in (0, 1)$ . Definim șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$ , prin  $x_0 > 0$  și

$$x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}}, \quad n \geq 1.$$

Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și să se determine limita sa.

**PROBLEMA 4.**

- a) Aflați parametrii  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2) = 2018$ .
- b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2})$ .

<sup>1</sup>Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

<sup>2</sup>Toate problemele sunt obligatorii;

<sup>3</sup>Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.