

VI

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 25 februarie 2018

Clasa a VI- a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1.

a) Pe tablă Romanița a scris 501 numere, de la 0 la 500. Când un elev a ieșit la tablă el a șters șase numere și a scris unul. Atunci de pe tablă, la fiecare pas s-au șters câte 5 numere. ... 1p

Deoarece $501 = 100 \times 5 + 1$, înseamnă că cele 501 numere pot fi șterse în 100 de pași și rămâne un număr pe tablă. ... 1p

Dar cei 25 de elevi, ies în ordine, atunci ei ies de $100:25 = 4$ ori la tablă fiecare. ... 1p

Însă Romanița a mai ieșit la tablă și a scris numerele. Atunci Romanița a ieșit de 5 ori la tablă.... 1p

b) Cum prin ștergerea a șase numere sescrive suma lor pe tablă, atunci rezultă că la fiecare pas suma tuturor numerelor de pe tablă este aceeași ... 1p

Suma celor 501 de numere este egală cu suma primelor 500 numere naturale nenule ... 1p

Suma este suma lui Gauss, deci $1 + 2 + \dots + 500 = (500 \cdot 501) : 2 = 125250$ 1p

2.

a) Fie $\overline{abcde} \in A$, unde $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu a, b, c, d, e distincte două câte două.

Vom arăta că A nu conține pătrate perfecte. Dacă $\overline{abcde}$ -pătrat perfect, există $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $\overline{abcde} = k^2$1p

Observăm ca $a + b + c + d + e = 15 \in M_3 \Rightarrow 3 \mid \overline{abcde} \Rightarrow 3 \mid k^2 \Rightarrow 3 \mid k$1p

Atunci $k = 3p$, $p \in \mathbb{N}$ și $\overline{abcde} = 9p^2$; prin urmare $9 \mid \overline{abcde}$ (fals).

În concluzie, în A nu sunt pătrate perfecte.1p

b) Mai întâi, aflăm card A .

Evident fixând cifrele 1,2 pe primele poziții iar cifrele 3,4,5 le lăsăm libere, vom obține 6 numere; dacă fixăm doar cifra 1 pe prima poziție, cum cifra 2 poate ocupa patru poziții, vom avea în acest caz $6 \cdot 4 = 24$ numere. În final, deoarece cifra 1 poate ocupa și ea 5 poziții, avem un total de $5 \cdot 24 = 120$ numere.1p

Vom calcula efectiv suma acestor numere; în cele 120 de numere cifrele unităților, a zecilor, a miilor ș.a.m.d sunt repartizate astfel: apar 24 cifre de 1, 24 cifre de 2, 24 cifre de 3, 24 cifre de 4 și 24 cifre de 5.1p

Sumând aceste 120 de numere, la final vom avea la rezultat următoarele rezultate: cifra unităților egală cu 0 (provine de la suma $24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$); cifra zecilor egală cu 6 (provine de la suma $360 + 36$); cifra sutelor egală cu 9 (provine de la suma $360 + 39$); cifra miilor egală cu 9; în fața cifrei miilor avem grupa $\overline{399}$1p

În concluzie, s-a format numărul 3999960, suma acestor numere. Atunci media aritmetică va fi numărul $3999960:120 = 33333$1p

3.

a) Din ipoteză rezultă că: $[BM] \equiv [AC], [BN] \equiv [CM]$ și $\sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle MCA$ (sunt unghiuri suplimentare cu $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ ale $\triangle ABC$ isoscel) $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle AMC$ 3p
 $\Rightarrow [AM] \equiv [MN] \Rightarrow \triangle AMN$ este isoscel 1p

b) Presupunem prin absurd că (AC este bisectoare a $\sphericalangle MAN$. Rezultă că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAM$
 $BC = CM = a$ și $[AC] \equiv [AC] \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle AMC \Rightarrow$ 2p
 $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACM$, dar sunt suplimentare, rezultă că sunt unghiuri drepte. Cum $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$,
se obține că $\triangle ABC$ are două unghiuri drepte, fals. Deci (AC nu poate fi bisectoare a $\sphericalangle MAN$.
..... 1p

4.

a) Notăm lungimile segmentelor astfel:

$OA = a, AB = a, BC = a, CD = 2a, DE = 3a, EF = 6a$ 1p

Fie M = mijloc $[CD]$, avem $CM = MD = a$

$OM = OA + AB + BC + CM = a + a + a + a = 4a$

$ME = MD + DE = a + 3a = 4a$ 1p

Deci, $OM = ME = 4a \Rightarrow [OM] \equiv [ME]$

$\Rightarrow M$ = mijloc $[OE]$ 1p

b) Presupunem că $\frac{2a}{6a} + \frac{a}{2a} + \frac{a}{4a} > \frac{12a}{13a}$ 1p

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{12}{13}$ 1p

$\frac{4+6+3}{12} > \frac{12}{13} \Leftrightarrow \frac{13}{12} > \frac{12}{13}$ 1p

$13^2 > 12^2 \Leftrightarrow 169 > 144$ (A) 1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Se acordă numai punctaje întregi.