OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
Barem, clasa a XI– a

1. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente complexe cu proprietatea că $AB - BA = A$. Să se arate că $AB^nA = O_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

G.M. 11/2012

Soluţie: Din $AB - BA = A$ obţinem $tr(A) = 0$ şi $A^2 = -\Delta \cdot I_2$, unde $\Delta = \det(A)$. .... 1 p

$AB - BA = A \Rightarrow ABA - BA^2 = A^2$, deci $ABA = BA^2 + A^2 = -\Delta \cdot B - \Delta \cdot I_2$.

$AB - BA = A \Rightarrow A^2B - ABA = A^2$, deci $ABA = A^2B - A^2 = -\Delta \cdot B + \Delta \cdot I_2$.

Aşadar $\Delta = 0$, deci $A^2 = O_2 = ABA$. .... 2 p

Afirmaţia se demonstrează prin inducţie după n.

Am demonstrat că $AB^1A = O_2$ deci $P(1)$ e o propoziţie adevărată.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că $AB^kA = O_2$ şi demonstrăm că $AB^{k+1}A = O_2$. .... 1 p

$AB - BA = A \,\big|\cdot B^k \quad \Rightarrow \quad AB^{k+1} - BAB^k = AB^k \big|\cdot A, \quad \Rightarrow \quad AB^{k+1}A - BAB^kA = AB^kA$ .... 2 p

$\overset{ip\ ind}{\Leftrightarrow} AB^{k+1}A - B\left(\underbrace{AB^kA}_{O_2}\right) = O_2 \Leftrightarrow AB^{k+1}A = O_2$ şi din primul principiu de inducţie rezultă concluzia .... 1 p

2. a) Să se găsească un exemplu de matrice distincte $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât

$$\det(A) = \det(B) = \det(C) = -1 \quad \text{şi} \quad \det(A+B) > \det(B+C).$$

b) Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = \det(B) = \det(C)$ şi $\det(A+B) > \det(B+C)$

Dacă $\det(A + i\cdot B) = \det(B + i \cdot C)$, să se demonstreze că

$$\det\left(A+\sqrt{3}B\right) + \det\left(B+\sqrt{2}C\right) > \det\left(A+\sqrt{2}B\right) + \det\left(B+\sqrt{3}C\right).$$

Dana Heuberger

***Soluţie:* a)** De exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\det(A+B) = 0 > -8 = \det(B+C)$. Orice exemplu corect .... 3 p

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \det(A + x\cdot B) - \det(B + x \cdot C) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \det(x\cdot A + B) - \det(x\cdot B + C) = ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$. .... 1 p

Avem $a = g(0) = \det(B) - \det(C) = 0$ şi $e = f(0) = \det(A) - \det(B) = 0$

deci $f(x) = bx^3 + cx^2 + dx$. .... 1 p

Din ipoteză, $f(i) = \det(A + i\cdot B) - \det(B + i\cdot C) = 0$, deci $b\cdot i^3 + c\cdot i^2 + d \cdot i = 0$

adică $-b\cdot i - c + d\cdot i = 0$, de unde rezultă $b = d$ şi $c = 0$. Obţinem $f(x) = b\cdot(x^3 + x)$ .... 1 p

Din ipoteză avem $f(1) = \det(A+B) - \det(B+C) = 2b > 0$, deci funcţia f e strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Rezultă că $f\left(\sqrt{3}\right) > f\left(\sqrt{2}\right)$, adică $\det\left(A+\sqrt{3}B\right) + \det\left(B+\sqrt{2}C\right) > \det\left(A+\sqrt{2}B\right) + \det\left(B+\sqrt{3}C\right)$ .... 1 p

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = \dfrac{24}{5}$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $5x_{n+1} = 13x_n + 12\sqrt{x_n^2 + 4}$.

a) Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 5^n - 5^{-n}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

Cristina Ocean

Indicaţie: a) Demonstraţia prin inducţie .... 4 p

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{5^{2n}}\right)^{5^{2n}-2+5^{-2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{2n}-2+5^{-2n}}{-5^{2n}}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ .... 3 p

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0 \in (0,\infty)$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(x_{n+1} - x_n)(x_n + 1) = 1$.

a) Să se arate că şirul este crescător.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Indicaţie: **a)** Demonstraţia prin inducţie a faptului că $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} > x_n > 0$ .... 2 p

b) Deoarece şirul e crescător, există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. .... 1 p

Dacă am avea că $\ell \in \mathbb{R}$, trecând la limită în relaţia de recurenţă din enunţ am obţine $(\ell - \ell)(\ell + 1) = 1$, fals.

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. .... 1 p

c) Din ipoteză obţinem $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n + 1}$ deci $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \dfrac{1}{x_n\cdot(x_n+1)} \to 1$ .... 1 p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n} \overset{C-S}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}+x_n}{1+x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_{n+1}}{x_n}+1}{\frac{1}{x_n}+1} = 2$$ .... 1 p

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$ .... 1 p