

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A VIII-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive x și y avem $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 4p$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0(A) \dots\dots\dots 3p$$

2. Determinați numărul perechilor de numere naturale n și m pentru care:

$$\sqrt{n^2 + (2m+1)n + m(m+1)} \in (13, 14).$$

Ciprian Dobraniș, Brăila

Soluție:

$$n^2 + (2m+1)n + m(m+1) = (n+m)(n+m+1) \dots\dots\dots 3p$$

$$(n+m)^2 < (n+m)(n+m+1) < (n+m+1)^2 \dots\dots\dots 3p$$

$$(n+m) = 13 \Rightarrow \text{sunt 14 perechi de numere naturale care verifică relația dată} \dots\dots\dots 1p$$

3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$. Fie M și N mijloacele laturilor BC și AB . Demonstrați că măsura unghiului dintre planele (VMN) și (ABC) este de 45° dacă și numai dacă tangenta unghiului dintre o față laterală și planul bazei este egală cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Adriana Mihăilă și Daniela Tilincă, Brăila

Soluție:

Fie $AB = 2a$ și fie P mijlocul lui $[MN]$.

” $\Rightarrow$ ” $VP \perp MN$, $OP \perp MN$ și, din ipoteză $m(\angle VPO) = 45^\circ$,2p

$\triangle VOP$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow VO = OP = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan(\angle VMO) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2p

” $\Leftarrow$ ” $\tan(\angle VMO) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Dar $OP = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci triunghiul VOP este dreptunghic isoscel3p

4. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, $AB = 4$ cm și M, N mijloacele laturilor BC și AA' . Determinați lungimea segmentului $C'S$, unde $MN \cap (A'B'C') = \{S\}$.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție:

Fie P mijlocul lui $[B'C'] \Rightarrow MN \cap (A'B'C') = MN \cap A'P = \{S\}$ 2p

Considerăm $ST \perp C'P, T \in B'C'$ 1p

$A'N$ linie mijlocie în $\triangle SMP \Rightarrow A'B'$ linie mijlocie în $\triangle STP \Rightarrow PT = 4$ cm și $ST = 8$ cm... 2p

$T.P.$ în triunghiul $\triangle STC' \Rightarrow SC' = 10$ cm.....2p