

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a IX-a

1. (a) Arătați că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
(b) Demonstrați că dacă $a, b, c > 0$ și $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, atunci $ab + bc + ac \leq 3$.

Romeo Ilie

2. Rezolvați ecuația $[x]^2 = 3x + 3$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

Florin Cârstea

3. Fie triunghiul ABC și punctele D, E, F, G, H astfel încât $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ și $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. Dreptele GH și AC se intersectează în I , iar BE și AC în J . Arătați că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AI} = k \cdot \overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{HI} = k \cdot \overrightarrow{HG}$ și $\overrightarrow{BE} = k \cdot \overrightarrow{EJ}$.

Ioana Mașca

4. Fie a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC și D, E, F picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B , respectiv C . Arătați că dacă

$$(b+c)\overrightarrow{AD} + (c+a)\overrightarrow{BE} + (a+b)\overrightarrow{CF} = \vec{0},$$

atunci ABC este un triunghi echilateral.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.