

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 16 Februarie 2014

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă, neconstantă și F o primitivă a lui f ce satisface $F(0) = F(1) = 0$. Fie $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$ și $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$. Definim funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ prin $g(x) = xf(x)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și fie G o primitivă a lui g care satisface $G(0) = 0$. Arătați că

$$|G(1)| \leq \frac{-mM}{2(M-m)}.$$

Duong Viet Thong, AMM 11581

Problema 2. Fie $\star$ o lege de compoziție asociativă și comutativă pe o mulțime S . Presupunem că pentru orice $x, y \in S$ există $z \in S$ astfel încât $x \star z = y$ (z poate depinde de x și y). Arătați că dacă $a, b, c \in S$ satisfac $a \star c = b \star c$ atunci $a = b$.

Problema 3. Se consideră numerele reale a și b și operația $\star$ pe $\mathbf{R}$ definită prin

$$x \star y = xy - a(x + y) + b.$$

Să se arate că intervalul (a, ∞) este o parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ față de operația $\star$ dacă și numai dacă $b \geq a(a + 1)$.

Problema 4. Determinați familia de primitive

$$I = \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 7 (un punct din oficiu).