

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2020**Clasa a VII-a****SUBIECTUL I (7p)**

Fie numerele $a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$ și

$$b = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{(5-3\sqrt{2})^{2019}} \cdot \frac{(10-6\sqrt{2})^{2020}}{2^{2018}}.$$

Arătați că numerele a și b sunt raționale.

SUBIECTUL II (7p)

a) Arătați că există cel puțin o pereche de numere naturale (x, y) , astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2019}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{3}-673\right)\left(\frac{y}{3}-673\right)} \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (7p)

În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF .

a) Demonstrați că dreptele AF și DE sunt perpendiculare.

b) Dacă $AF \cap CE = \{P\}$, arătați că B, P și D sunt puncte coliniare.

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul ABC ascuțitunghic, cu $m(\angle A) = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $CE \perp AB$, $E \in (AB)$ și M mijlocul laturii BC . Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Gazeta matematică

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.