

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

a) $1 \in G$;

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$;

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$;

Arătați că $\mathbb{N}^* \subset G$.

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Problema 2. Determinați termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin:

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ și } x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n+1}}} - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Marius Perianu, Slatina

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O . Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA , respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$.

a) Arătați că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3]$ și $[CH_4]$ au același mijloc P .

b) Arătați că punctele O, P și mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

c) Arătați că dacă triunghiurile MH_1H_3 și NH_2H_4 au același centru de greutate, atunci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

[***]

Problema 4. Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^3 - ab\sqrt{ab}}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - bc\sqrt{bc}}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - ca\sqrt{ca}}{c^2 + ca + a^2} \geq 0.$$

Costel Anghel, Negreni, Olt

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a X-a

Problema 1. Determinați numerele reale x pentru care $x^{\sqrt{x}} < (\sqrt{x})^x$.

Aurel Chiriță, Slatina

Problema 2. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 2$ are loc inegalitatea:

$$\lg 2 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg(2n) < \lg^n(n+1).$$

Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 3. Se consideră numerele complexe, nenule și distincte z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Știind că numerele $w_1 = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$, $w_2 = z_3 + z_1 + \frac{z_3 z_1}{z_2}$ și $w_3 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$ sunt reale,

arătați că $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Marius Perianu, Slatina

Problema 4. Rezolvați ecuația:

$$(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_3 5}.$$

Marius Perianu, Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2014

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + I_2) = \det(A + \det A \cdot I_2) - 3\det A$.
Arătați că $|\det A| \geq 2$.

Marius Perianu, Slatina

Problema 2. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ care verifică relațiile:

$$\det(A^4 + A^2 B^2 + B^4) = 9 \quad \text{și} \quad \det(A^2 + B^2) + \det(AB) = 5.$$

Calculați $\sqrt{\det(A^2 + AB + B^2)} + \sqrt{\det(A^2 - AB + B^2)}$.

Traian Tămîian, Gazeta Matematică nr. 5/2014

Problema 3. a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2$.

b) Calculați limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{2 + \sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + n}}, \quad n \geq 1.$$

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 4. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$x_1 \in (1, 2) \quad \text{și} \quad x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + 1, \quad n \geq 1.$$

Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.

Florin Nicolaescu, Balș

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 15 FEBRUARIE 2015

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}.$$

a) Arătați că $Z(G)$ este subgrup al lui $(G, \cdot)$.

b) Arătați că dacă $x^2 = e$ pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este abelian.

Mihai Opincariu, Gazeta Matematică nr. 12/2014

Problema 2. Calculați $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx$.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. Se consideră un monoid $(M, *)$ cu următoarea proprietate de simplificare:

dacă $a, b, c, d, x \in M$ verifică relația $a * x * b = c * x * d$, atunci $a * b = c * d$.

Arătați că monoidul $(M, *)$ este comutativ.

Dorin Mărghidanu, Corabia

Problema 4. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și continuă în a . Arătați că funcția

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

este crescătoare dacă și numai dacă $f(a) \geq 0$.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.