

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a XII-a

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{4}\right\}$. Definim pe $\mathbb{R}$ operaţia "★" prin

$$x \star y = a(x^2 + y^2) + 4xy + (b^2 - 6)x + by + \frac{1-b}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât restricţia operaţiei "★" la mulţimea G să determine pe G o structură de grup abelian.
- (b) Calculaţi $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $x \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$, în ipoteza că $(G, \star)$ este grup abelian.

Ioana Maşca

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, $\text{card}(G) = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- (a) $(G, \cdot)$ este grup comutativ.
- (b) $x^{n-1} \cdot y^{n-1} = (x \cdot y)^{n-1}$, $\forall x, y \in G$.
- (c) $x^{n-2} \cdot y^{n-2} = (y \cdot x)^{n-2}$, $\forall x, y \in G$.

Ovidiu Pop

3. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(x) + x \cdot f(x) \cdot \ln x \geq 0$, $\forall x > 0$. Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei F este monotonă.

Romeo Ilie

4. Calculaţi $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1 + e^{2x-1}} dx$.

Gazeta Matematică

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.